

Санкт-Петербургский государственный университет

МАМАЕВ Даниил Антонович

Выпускная квалификационная работа

**Конфигурационные пространства
многоугольников
с условиями на длины сторон**

Образовательная программа
бакалавриат «Математика»
Направление и код: 01.03.01 «Математика»
Шифр ОП: СВ.5000.2015

Научный руководитель:
профессор,
Кафедра высшей геометрии,
доктор ф.-м. наук,
Гаянэ Юрьевна Панина

Рецензент:
старший научный сотрудник,
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
кандидат ф.-м. наук,
Николай Николаевич Васильев

Санкт-Петербург
2019

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе мы рассматриваем пространство $\mathcal{BL}_n(L)$ n -звенных ломаных длины $L > 1$, соединяющих две фиксированные точки на расстоянии 1 и изучаем ориентированную площадь $\mathcal{A}$ как функцию на этих пространствах. Классическим результатом, представляющим решение дискретного аналога задачи Дидоны, является тот факт, что ломаная из $\mathcal{BL}_n(L)$, ограничивающая наибольшую площадь вместе с отрезком, соединяющим ее концы, есть ломаная, вершины которой расположены на окружности против часовой стрелки, а все звенья равны. Нашей задачей является обобщить этот результат, описав не только глобальный максимум, но все критические точки ориентированной площади на $\mathcal{BL}_n(L)$, а также вычислить индексы Морса этих критических точек. Подобные описания для функций, имеющих геометрический смысл, на конфигурационных пространствах многоугольников с различными ограничениями являются предметом многих работ. Для ориентированной площади на пространстве многоугольников с фиксированными длинами сторон этот вопрос изучался в работах [12], [14], [16], [9], [4] и других. Для расстояния от начала до конца ломаной на пространстве ломаных с фиксированными длинами звеньев — в работе [2]. Для ориентированной площади на многоугольниках фиксированного периметра — в работе [8]. Другие примеры можно найти в [2], [4] и [13].

Еще один вопрос, который мы изучаем в этой работе — это топологический тип пространства $\mathcal{BL}_n(L)$. Этот вопрос тесно связан с рассмотрением различных функций на пространстве. Например, в работе [3] с помощью теории Морса вычислены гомологии конфигурационных пространств многоугольников с фиксированными длинами сторон. И во многих перечисленных выше работах разрешение вопроса о топологическом типе исследуемого конфигурационного пространства было либо необходимым ингредиентом, либо мотивацией для изучения функции на этом пространстве.

Перечислим основные результаты работы.

- (1) Конфигурационное пространство $\mathcal{BL}_n(L)$ гомеоморфно сфере S^{2n-3} (Теорема 3). Доказательство построено на представлении $\mathcal{BL}_n(L)$ как множества уровня выпуклой функции на $\mathbb{R}^{2n-2}$. В отличие от пространства многоугольников, $\mathcal{BL}_n(L)$ не несет естественной гладкой структуры.
- (2) Критические точки функции $\mathcal{A}$ на гладкой части $\mathcal{BL}_n(L)$ (и, более того, на семействе гладких многообразий, приближающих $\mathcal{BL}_n(L)$) суть равнозвенные ломаные, вписанные в окружность, центр которой лежит по одну сторону от каждого направленного звена (Теорема 4). Доказательство опирается на вычисление множителей Лагранжа с использованием геометрических соображений.
- (3) Количество критических точек функции $\mathcal{A}$ на $\mathcal{BL}_n(L)$ тем больше, чем больше L и изменяется только при $L \in \left\{ \frac{\cos \theta}{\cos n\theta} \mid \operatorname{tg} n\theta = n \operatorname{tg} \theta \neq 0 \right\}$ (Предложение 5). Для доказательства этого факта мы устанавливаем биекцию между критическими точками и решениями некоторого тригонометрического уравнения, а затем используем свойства многочленов Чебышёва для подсчета числа этих решений.
- (4) При общем значении L , то есть, для всех, кроме конечного числа, критические точки функции $\mathcal{A}$ на $\mathcal{BL}_n(L)$ невырождены и их индексы Морса вычислены. (Теорема 7). Для вычисления мы активно используем комплекс Морса, а также известные результаты про индексы Морса критических точек площади на других конфигурационных пространствах.

В параграфе 2 даны точные определения, и конфигурационное пространство $\mathcal{C}_{n+1}$ $(n+1)$ -угольников периметра 1 из работы [8] представлено как компактификация пространства $\mathcal{BL}_n = \bigcup_{L \geq 1} \mathcal{BL}_n(L)$ всех n -звенных ломаных с фиксированными концами.

В параграфе 3 $\mathcal{BL}_n(L)$ представлено как объединение гладких многообразий, определены гладкие приближения $\mathcal{BL}_n(L)$, и доказано, что $\mathcal{BL}_n(L)$ гомеоморфно сфере S^{2n-3} при $L > 1$. Само по себе $\mathcal{BL}_n(L)$ не является гладким многообразием: оно негладко в точках, соответствующих ломаным для которых одно (или несколько) из звеньев вырождается в точку. Но если фиксировать набор вырожденных звеньев и потребовать невырожденности остальных звеньев, мы получим гладкое подмногообразие в $\mathcal{BL}_n(L)$. Структура этих подмногообразий описана в Предложении 2. Построение гладких приближений $\mathcal{BL}_n(L)$ основано на замене обычного расстояния в $\mathbb{R}$, которое имеет особенность в 0, на свертку этого расстояния с характеристической функцией интервала длины ε . Эти гладкие приближения необходимы для применения теории Морса к ориентированной площади. Наконец, в Теореме 3 доказано, что гладкие приближения $\mathcal{BL}_n(L)$ диффеоморфны сфере S^{2n-3} , а само $\mathcal{BL}_n(L)$ гомеоморфно S^{2n-3} . Основным ингредиентом доказательства является представление этих пространств как границ выпуклых компактов с непустой внутренностью.

В параграфе 4 дано геометрическое описание критических точек ориентированной площади $\mathcal{A}$ на $\mathcal{BL}_n(L)$ в геометрических терминах: n -звенная ломаная без вырожденных звеньев является критической точкой $\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}_n(L)}$, если и только если длины всех звеньев равны, все вершины ломаной лежат на некоторой окружности, и центр этой окружности лежит по одну сторону от каждого из звеньев. Этот результат есть следствие Теоремы 4. Доказательство опирается на геометрические идеи: (1) при фиксированных концах экстремум площади 2-звенной ломаной достигается при равенстве звеньев, и, (2) если рассмотреть все четырехугольники с данными длинами сторон, то в общем положении экстремум ориентированной площади достигается на вписанном четырехугольнике. Тем не менее, прямое применение этих идей представляется затруднительным из-за множества вырожденных случаев, поэтому они переформулированы на языке множителей Лагранжа.

В параграфе 5 вычислена мощность $\mathcal{CRIT}_n(L)$ множества критических точек ориентированной площади $\mathcal{A}$ на $\mathcal{BL}_n(L)$ и описано множество $\mathcal{CRIT}_n = \bigcup_{L > 1} \mathcal{CRIT}_n(L)$. В Лемме В мы параметризуем $\mathcal{CRIT}_n$ одним углом и показываем, что замыкание $\mathcal{CRIT}_n$ в $\mathcal{C}_{n+1}$ есть простая замкнутая кривая. В Лемме С мы устанавливаем биекцию σ между $\mathcal{CRIT}_n(L)$ и нулями функции $|U_{n-1}(x)| - n/L$, где U_k есть k -й многочлен Чебышёва второго рода. Далее, используя свойства многочленов Чебышёва, мы вычисляем количество точек в $\mathcal{CRIT}_n(L)$. Это вычисление составляет содержание Предложения 5.

В параграфе 6 доказаны две технические леммы. В Лемме D мы прямыми вычислениями показываем, что биекция σ согласована с ориентированной площадью: для ломаной $Q \in \mathcal{CRIT}_n(L)$ чем больше $\sigma(Q)$, тем больше $\mathcal{A}(Q)$. В Лемме E мы, представляя обранный гессиан ориентированной площади как рациональную функцию некоторого аргумента и вычислив его в конкретной точке, показываем, что лишь конечное количество ломаных $Q \in \mathcal{CRIT}_n$ могут быть вырожденными критическими точками ориентированной площади.

В параграфе 7 мы вычисляем индексы Морса невырожденных критических точек ориентированной площади. Верхняя оценка, полученная в Лемме G, следует из вычисления индексов критических точек площади на шарнирных многоугольниках в

Теореме 6, доказанной в работе [4] и предшествующих ей. В Теореме 7, для общего значения L , доказано, что индексы всех критических точек различны и неравенство из Леммы G на самом деле является равенством. Доказательство ведется индукцией по количеству звеньев, для вычисления индексов некоторых критических точек из $\mathcal{CRIT}_n(n)$ использованы результаты работы [8] про индексы Морса критических точек ориентированной площади на $\mathcal{C}_{n+1}$. Для установления индексов остальных критических точек рассматривается комплекс Морса, гомологии которого есть симплициальные гомологии сферы S^{2n-3} .

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КОНСТРУКЦИИ

Для натурального $n \geq 3$ n -угольником называется упорядоченный набор $P = (p_0, \dots, p_{n-1})$ из n точек в $\mathbb{R}^2$ (подразумевается, что соседние точки, а также p_1 и p_n соединены отрезками). Действия группы $\text{Sim}_+(\mathbb{R}^2)$ сохраняющих ориентацию преобразований подобия и ее подгруппы $\text{Isom}_+(\mathbb{R}^2)$ сохраняющих ориентацию движений на $\mathbb{R}^2$ дают диагональные действия на n -угольниках. Конфигурационным пространством многоугольников фиксированного периметра называется фактор

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_n &= \{n\text{-угольники } P: |p_1 - p_0| + \dots + |p_{n-1} - p_{n-2}| + |p_0 - p_{n-1}| = 1\} / \text{Isom}_+(\mathbb{R}^2) \\ &= \{n\text{-угольники } P: \text{не все } p_i \text{ совпадают}\} / \text{Sim}_+(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

Это конфигурационное пространство изучено в работах [7], [8], мы же пока воспроизведем лишь базовые сведения о нем. Топологию на $\mathcal{C}_n$ можно задать, например, с помощью метрики $d_{\mathcal{C}_n}$: для n -угольников P и Q периметра 1 имеем

$$d_{\mathcal{C}_n}([P], [Q]) = \inf_{g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)} \left\{ \sqrt{|p_0 - g(q_0)|^2 + \dots + |p_{n-1} - g(q_{n-1})|^2} \right\}.$$

Более наглядно эту топологию можно увидеть так: отождествим стандартным образом $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}$ и рассмотрим отображение

$$\mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{CP}^{n-2}, \quad [P] \mapsto [p_1 - p_0 : \dots : p_{n-1} - p_{n-2}],$$

которое является гомеоморфизмом. Таким образом, мы получили на $\mathcal{C}_n$ естественную гладкую структуру, перенеся ее с $\mathbb{CP}^{n-2}$.

Для натурального $n \geq 2$ n -звенной ломаной Q называется набор из $(n+1)$ (не обязательно различных) точек $q_0, \dots, q_n$ в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ вместе с отрезками, соединяющими соседние точки. Длина n -звенной ломаной Q есть

$$\mathcal{L}(Q) = |q_1 - q_0| + \dots + |q_n - q_{n-1}|.$$

Рассмотрим пространство n -звенных ломаных с фиксированными, например, в точках $(-1/2, 0)$ и $(1/2, 0)$, концами:

$$\mathcal{BL}_n = \{n\text{-звенные ломаные } Q: q_0 = (-1/2, 0), \quad q_n = (1/2, 0)\}$$

Сопоставление $Q \mapsto (q_1, \dots, q_{n-1})$ отождествляет $\mathcal{BL}_n$ с $\mathbb{R}^{2(n-1)}$ и в дальнейшем, говоря о топологии или дифференциальной структуре $\mathcal{BL}_n$, о гладких, выпуклых и прочих отображениях с участием $\mathcal{BL}_n$, мы будем иметь в виду именно это отождествление.

Пространство $\mathcal{BL}_n$, как видно, не является компактным. Его естественной компактификацией является определенное выше конфигурационное пространство $(n+1)$ -угольников фиксированного периметра $\mathcal{C}_{n+1}$. А именно, $\mathcal{BL}_n$ отождествляется с подмножеством $\mathcal{C}_{n+1}$ посредством отображения $Q \mapsto [(q_0, \dots, q_n)]$, добавляющего недостающую сторону $q_n q_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{BL}_n &\xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^{n-1} \xrightarrow{\cong} \{[z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{CP}^{n-1} : z_1 + \dots + z_n \neq 0\} \subseteq \mathbb{CP}^{n-1} \cong \mathcal{C}_{n+1} \\ Q &\mapsto (q_1, \dots, q_{n-1}) \mapsto [q_1 - q_0 : \dots : q_n - q_{n-1}] \end{aligned}$$

Длину ломаной $\mathcal{L}$ можно продолжить до функции $\mathcal{L} : \mathcal{C}_{n+1} \rightarrow [1, +\infty]$ следующим образом:

$$\mathcal{L}([P]) = \frac{|p_1 - p_0| + \dots + |p_n - p_{n-1}|}{|p_n - p_0|}.$$

Теперь определим основной объект изучения этой работы. Для $L \in [1; +\infty)$ конфигурационное пространство $\mathcal{BL}_n(L)$ n -звенных ломаных длины L с концами в $(-1/2, 0)$ и $(1/2, 0)$ — это

$$\mathcal{BL}_n(L) = \{Q \in \mathcal{BL}_n : \mathcal{L}(Q) = L\} = \{[P] \in \mathcal{C}_{n+1} : \mathcal{L}([P]) = L\},$$

в это же семейство вкладывается граница $\mathcal{BL}_n$ на бесконечности:

$$\mathcal{BL}_n(+\infty) = \{[P] \in \mathcal{C}_{n+1} : \mathcal{L}([P]) = +\infty\} = \mathcal{C}_{n+1} \setminus \mathcal{BL}_n,$$

состоящая из всех многоугольников, у которых $p_n = p_0$, а потому изоморфная $\mathcal{C}_n$.

Для $(n+1)$ -угольников определим (нормированную, удвоенную) ориентированную площадь

$$\mathcal{A} : \mathcal{C}_{n+1} \rightarrow [-\infty, +\infty], \quad \mathcal{A}([P]) = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0 + \dots + x_n y_0 - x_0 y_n}{|p_n - p_0|^2}, \quad \text{где } p_i = (x_i, y_i).$$

Заметим, что $\mathcal{BL}_n(+\infty) = \mathcal{A}^{-1}(\pm\infty)$, а для ломаной $Q \in \mathcal{BL}_n \subseteq \mathcal{C}_{n+1}$ формула переписывается следующим образом:

$$\mathcal{A}(Q) = x_0 y_1 - x_1 y_0 + \dots + x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1},$$

то есть $\mathcal{A}$ — гладкая функция на $\mathcal{BL}_n$.

Симметрия относительно (произвольной) прямой задает на $\mathcal{C}_{n+1}$ инволюцию $[P] \mapsto \overline{[P]}$. На $\mathcal{BL}_n$ эта инволюция есть отражение ломаной относительно оси Ox . Инволюция сохраняет длину и меняет знак ориентированной площади.

Пусть $(l_1, \dots, l_n)$ — набор положительных чисел. Определим, следуя [2], [7], конфигурационное пространство многоугольников с фиксированными длинами сторон:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(l_1, \dots, l_n) &= \{n\text{-угольники } P : |p_1 - p_0| = l_1, \dots, |p_n - p_{n-1}| = l_n\} / \text{Isom}_+(\mathbb{R}^2) \\ &= \{(u_1, \dots, u_n) \in (S^1)^n : l_1 u_1 + \dots + l_n u_n = 0\} / \text{SO}(2, \mathbb{R}) \\ &= \left\{ n\text{-угольники } P : \begin{aligned} &|p_1 - p_0| = l_1, \dots, |p_{n-1} - p_{n-2}| = l_{n-1}, \\ &p_0 = (0, 0), \quad p_{n-1} = (l_n, 0) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$\mathcal{M}(l_1, \dots, l_n)$ непусто если и только если выполняется неравенство треугольника: каждое из l_i не больше суммы остальных. Назовем набор $(l_1, \dots, l_n)$ общим, если ни для какой комбинации знаков сумма $\pm l_1 \pm \dots \pm l_n$ не равна 0. Если $(l_1, \dots, l_n)$ — общий набор, то [2, Theorem 1.3] $\mathcal{M}(l_1, \dots, l_n)$ — гладкое замкнутое ориентируемое многообразие размерности $n-3$. Через каждую ломаную $Q \in \mathcal{BL}_n$ проходит конфигурационное

пространство ломаных с такими же длинами звеньев

$$\mathcal{M}(Q) = \{P \in \mathcal{BL}_n : |p_1 - p_0| = |q_1 - q_0|, \dots, |p_n - p_{n-1}| = |q_n - q_{n-1}|\},$$

которое есть вложенное в $\mathcal{BL}_n$ пространство $\mathcal{M}(|q_1 - q_0|, \dots, |q_n - q_{n-1}|, 1)$.

3. ТОПОЛОГИЯ КОНФИГУРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОМАНЫХ ФИКСИРОВАННОЙ ДЛИНЫ

Сначала разберем вырожденный случай ломаных длины 1.

Предложение 1. Пусть $n \geq 1$. Тогда $\mathcal{BL}_n(1)$ гомеоморфно $(n-1)$ -мерному симплексу Δ^{n-1}

Доказательство. $\mathcal{BL}_n(1)$ состоит из ломаных, все звенья которых сонаправлены, поэтому $\mathcal{BL}_n(1) \subseteq \mathcal{BL}_n \cong \mathbb{R}^{2(n-1)}$ есть множество неупорядоченных наборов из $n-1$ точек на отрезке $\{(x, 0), -1/2 \leq x \leq 1/2\}$, а это — $(n-1)$ -мерный симплекс Δ^{n-1} . $\square$

Теперь разберем общий случай ломаных длины больше 1. Конфигурационное пространство $\mathcal{BL}_n(L)$ есть множество уровня, вообще говоря, негладкой функции $\mathcal{L}$, поэтому $\mathcal{BL}_n(L)$ не является гладким подмногообразием в $\mathcal{BL}_n$. Построим разбиение $\mathcal{BL}_n(L)$ в объединение гладких подмногообразий. Для каждого подмножества $I \subseteq [n] = \{0, \dots, n-1\}$ из хотя бы двух элементов определим пространства ломаных с вырожденными в точку звеньями

$$\mathcal{BL}_I(L) = \{Q \in \mathcal{BL}_n(L) : \forall i \notin I \ q_i = q_{i+1}\}$$

и

$$\widetilde{\mathcal{BL}}_I(L) = \{Q \in \mathcal{BL}_n(L) : \forall i \notin I \ q_i = q_{i+1}, \forall i \in I \ q_i \neq q_{i+1}\}.$$

Обозначим также $\widetilde{\mathcal{BL}}_n(L) = \widetilde{\mathcal{BL}}_{[n]}(L)$. В Предложении 2 мы докажем, что $\widetilde{\mathcal{BL}}_I(L)$ дают разбиение $\mathcal{BL}_n(L)$ на гладкие подмногообразия. Но сначала представим $\mathcal{BL}_n(L)$ как предел гладких гиперповерхностей в $\mathcal{BL}_n$. Выберем $\varepsilon > 0$. Для $v \in \mathbb{R}^2$ определим ε -модуль:

$$|v|_\varepsilon = \begin{cases} \frac{|v|^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} & , \ |v| < \varepsilon \\ |v| & , \ |v| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Это всего лишь C^1 -гладкая функция, но этого вполне хватит для наших целей. Теперь для ломаной $Q \in \mathcal{BL}_n$ определим ее ε -длину $\mathcal{L}_\varepsilon(Q) = |q_1 - q_0|_\varepsilon + \dots + |q_n - q_{n-1}|_\varepsilon$. Обычные модуль и длину будем для единообразия обозначать как $|\cdot|_0$ и $\mathcal{L}_0$. Вложим наше конфигурационное пространство $\mathcal{BL}_n(L) = \mathcal{BL}_n^0(L)$ в семейство гладких многообразий: для $\varepsilon \geq 0$ определим $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L) = \{Q \in \mathcal{BL}_n : \mathcal{L}_\varepsilon(Q) = L\}$.

Лемма А. Пусть $L > 1$ и $L/n > \varepsilon > 0$. Тогда

- (1) $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$ есть C^1 -гладкая гиперповерхность в $\mathcal{BL}_n$.
- (2) $\widetilde{\mathcal{BL}}_n(L)$ есть C^∞ -гладкое подмногообразие в $\mathcal{BL}_n$ размерности $2n-3$.

Доказательство. Так как $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$ — это множество уровня функции $\mathcal{L}_\varepsilon$, достаточно показать, что если $\mathcal{L}_\varepsilon(Q) > 1$, то $\text{grad } \mathcal{L}_\varepsilon(Q) \neq 0$. Обозначим для $i = 0, \dots, n-1$ за α_i угол между $(q_{i+1} - q_i)$ и $(q_n - q_1)$ (если он определен) и $l_i = |q_{i+1} - q_i|$, а также введем вспомогательную функцию

$$m_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x|/\varepsilon, & |x| < \varepsilon; \\ 1, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда для $i = 1, \dots, n-1$ частные производные $\mathcal{L}_\varepsilon$ суть

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial x_i}(Q) &= m_\varepsilon(l_{i-1}) \cos \alpha_{i-1} - m_\varepsilon(l_i) \cos \alpha_i \\ \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial y_i}(Q) &= m_\varepsilon(l_{i-1}) \sin \alpha_{i-1} - m_\varepsilon(l_i) \sin \alpha_i,\end{aligned}$$

при этом мы считаем, что 0 в произведении с чем угодно (пусть даже неопределенным) равен 0. Пусть все частные производные равны 0. Тогда $m_\varepsilon(l_{i-1})^2 ((\cos \alpha_{i-1})^2 + (\sin \alpha_{i-1})^2) = m_\varepsilon(l_i)^2 ((\cos \alpha_i)^2 + (\sin \alpha_i)^2)$, поэтому $m_\varepsilon(l_i) = m_\varepsilon(l_{i-1})$ не зависит от i . При этом m может равняться или $\frac{L}{n\varepsilon}$, или 1, что в любом случае не 0, поэтому $\cos \alpha_{i-1} = \cos \alpha_i$ и $\sin \alpha_{i-1} = \sin \alpha_i$ для $i = 1, \dots, n-1$. Значит, все звенья ломаной $q_1 \dots q_n$ сонаправлены, то есть $\mathcal{L}(Q) = 1$. Если все l_i не короче ε , то $\mathcal{L}_\varepsilon(Q) = \mathcal{L}(Q) = 1$, что противоречит предположению. Поэтому найдется такое i , что $l_i < \varepsilon$, но тогда $1 < \frac{L}{n\varepsilon} = m = l_i/\varepsilon < 1$. Итого, все частные производные $\mathcal{L}_\varepsilon$ не могут обнуляться.

Второй пункт леммы является простым следствием из первого: для ломаной Q из $\widetilde{\mathcal{BL}}_n(L)$ возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{|q_{i+1} - q_i| : i = 0, \dots, n-1\}$. Тогда $Q \in \mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$ и некоторая окрестность Q в $\widetilde{\mathcal{BL}}_n(L)$ совпадает с окрестностью Q в $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$. Кроме того, $\mathcal{L}$ является бесконечно гладкой функцией в этой окрестности, откуда и получаем утверждение второго пункта. $\square$

Теперь мы готовы доказать, что $\mathcal{BL}_I(L)$ дают гладкое разбиение $\mathcal{BL}_n(L)$.

Предложение 2. Пусть $n \geq 2$ и $L > 1$. Тогда

(1)

$$\mathcal{BL}_n(L) = \bigsqcup_{I \subseteq n, |I| \geq 2} \widetilde{\mathcal{BL}}_I(L).$$

(2) Для всякого $I \subseteq n, |I| \geq 2$ пространство $\mathcal{BL}_I(L)$ естественным образом отождествляется с $\mathcal{BL}_{|I|}(L)$, а пространство $\widetilde{\mathcal{BL}}_I(L)$ — с $\widetilde{\mathcal{BL}}_{|I|}(L)$.

(3) Для всякого $I \subseteq n, |I| \geq 2$ пространство $\widetilde{\mathcal{BL}}_I(L)$ есть гладкое подмногообразие в $\mathcal{BL}_n$ размерности $2|I| - 3$.

Доказательство. Первый пункт предложения есть переформулировка очевидного факта: у n -звенной ломаной некоторые звенья вырождены в точку, а остальные — нет. Для доказательства оставшихся двух пунктов фиксируем $I \subseteq n, |I| = k \geq 2$ и рассмотрим аффинное вложение

$$j_I: \mathcal{BL}_k \rightarrow \mathcal{BL}_n, \quad j_I((p_1, \dots, p_{k-1})) = (q_1, \dots, q_{n-1}),$$

где $q_{i+1} = q_i$ при $i \notin I$, а если i — l -й по величине элемент I , то $q_{i+1} = p_l$. Второй пункт предложения следует из того, что $j_I(\mathcal{BL}_k(L)) = \mathcal{BL}_I(L)$ и $j_I(\widetilde{\mathcal{BL}}_k(L)) = \widetilde{\mathcal{BL}}_I(L)$. Третий же пункт теперь следует из Леммы A. $\square$

Пусть $\varepsilon \geq 0$, тогда $\mathcal{L}_\varepsilon$ является выпуклой функцией, так как это сумма ε -модулей, а они выпуклы. Рассмотрим проекцию на единичную сферу

$$\pi: \{Q \in \mathcal{BL}_n : \mathcal{L}(Q) > 1\} \rightarrow S^{2n-3},$$

$$Q = ((-1/2, 0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (1/2, 0)) \mapsto \frac{((x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}))}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2}}.$$

КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА МНОГОУГОЛЬНИКОВ

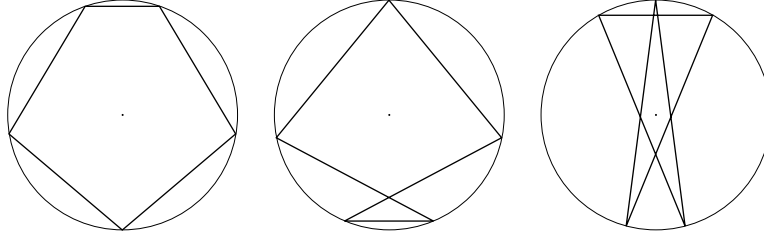


Рис. 1. ломанные из $\mathcal{CRIT}_4(8)$ с $\alpha \in (0, \pi)$

Теорема 3. Пусть $L > 1$ — вещественное число. Тогда

- (1) Если $\min \left\{ \frac{L}{n}, \frac{2(L-1)}{n-2} \right\} > \varepsilon > 0$, то отображение $\pi: \mathcal{BL}_n^\varepsilon(L) \rightarrow S^{2n-3}$ является C^1 -диффеоморфизмом.
- (2) Отображение $\pi: \mathcal{BL}_n(L) \rightarrow S^{2n-3}$ является гомеоморфизмом, а его сужение на $\widetilde{\mathcal{BL}}_n(L)$ — C^∞ -диффеоморфизмом на образ.

Доказательство. Зафиксируем $L > 1$, $\min \left\{ \frac{L}{n}, \frac{2(L-1)}{n-2} \right\} > \varepsilon \geq 0$, и докажем, что отображение $\pi: \mathcal{BL}_n^\varepsilon(L) \rightarrow S^{2n-3}$ является гомеоморфизмом. Обозначим $K = \{Q \in \mathcal{BL}_n: \mathcal{L}_\varepsilon(Q) \leq L\}$. K является выпуклым множеством как подуровень выпуклой функции $\mathcal{L}_\varepsilon$. Если у многоугольника Q есть вершина, находящаяся от точки q_1 на расстоянии больше $\max\{\varepsilon, L\}$, то $\mathcal{L}_\varepsilon(Q) > L$, а значит, K — выпуклый компакт, при этом его граница — это $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$. Теперь достаточно доказать, что 0 содержится во внутренней части K . В самом деле, если все точки $q_1, \dots, q_{n-1}$ находятся в шаре радиуса δ с центром в 0 , то

$$\mathcal{L}_\varepsilon(Q) < (1/2 + \delta) + (n-2) \cdot \frac{4\delta^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} + (1/2 + \delta) = 1 + \frac{n-2}{2}\varepsilon + 2\delta(1 + (n-2)\delta/\varepsilon),$$

что меньше чем L для достаточно маленьких δ , так как $1 + \frac{n-2}{2}\varepsilon < L$.

$\mathcal{L}_\varepsilon \geq \mathcal{L}$, поэтому проекция π определена в некоторой окрестности $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$, а, по Лемме А, $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$ — C^1 -гладкая гиперповерхность в $\mathcal{BL}_n$. Если мы проверим, что дифференциал $\pi: \mathcal{BL}_n^\varepsilon(L) \rightarrow S^{2n-3}$ инъективен во всех точках, то из равенства размерностей следует, что $\pi|_{\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)}$ — локальный диффеоморфизм. Вместе с уже доказанной биективностью, это даст нам результат первого пункта теоремы. Пусть $Q \in \mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$. Тогда

$$\text{Ker}\{d_Q\pi: T_Q\mathcal{BL}_n \rightarrow T_{Q/|Q|}S^{2n-3}\} = \mathbb{R}Q,$$

то есть нужно проверить, что $\mathbb{R}Q \not\subset T_Q\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$, а это ясно, так как 0 лежит в $\text{Int } K$ и прямая $\mathbb{R}Q \ni 0$ не может касаться границы выпуклого компакта K .

$\pi|_{\widetilde{\mathcal{BL}}_n(L)}$ является локальным диффеоморфизмом так как $\widetilde{\mathcal{BL}}_n(L)$ локально совпадает с некоторым $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$. Кроме того, $\pi|_{\widetilde{\mathcal{BL}}_n(L)}$ — инъекция, поэтому диффеоморфизм на образ. $\square$

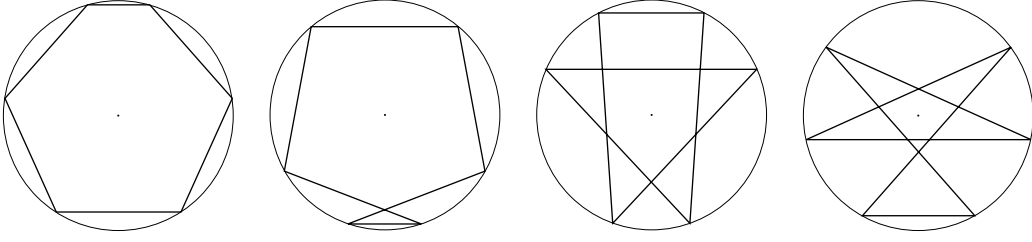


Рис. 2. ломаные из $CRIT_5(10)$ с $\alpha \in (0, \pi)$

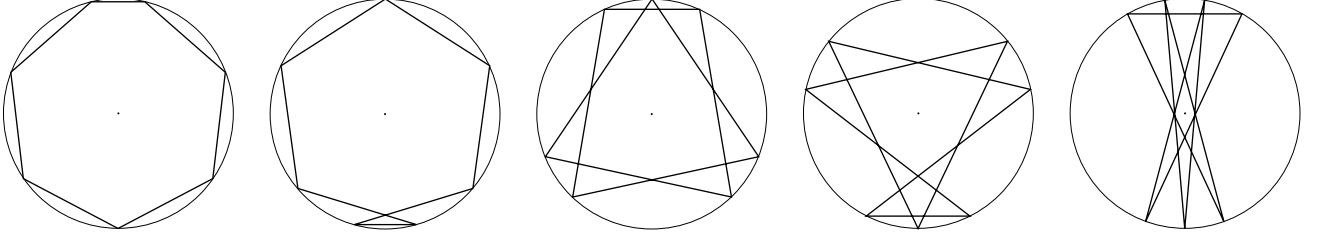


Рис. 3. ломаные из $CRIT_6(12)$ с $\alpha \in (0, \pi)$

4. ОРИЕНТИРОВАННАЯ ПЛОЩАДЬ И КРИТИЧЕСКИЕ ЛОМАННЫЕ

Изучим ориентированную площадь $\mathcal{A}$ на $\mathcal{BL}_n(L)$ и его сглаженных версиях. $\mathcal{A}$ — это гладкая функция на $\mathcal{BL}_n$, но $\mathcal{BL}_n(L)$ не является гладким подмногообразием. С одной стороны, $\mathcal{BL}_n(L)$ гомеоморфно S^{2n-3} , и можно рассматривать $\mathcal{A}$ как кусочно-гладкую функцию на гладком многообразии S^{2n-3} , используя для ее изучения производные Кларка, как в работе [1], но отождествление границы выпуклого компакта с непустой внутренностью со сферой не является каноническим, поэтому такой подход кажется искусственным. С другой стороны, в книге [5] представлен общий подход для изучения сужений гладких функций на негладкие подмногообразия, но мы дадим более hands-on рассуждения, основанные на сглаживаниях, определенных в предыдущей части.

Определение. Критической n -звенной ломаной называется ломаная $Q \in \mathcal{BL}_n$, такая что все ее вершины лежат на некоторой окружности, и ориентированный угол $\angle q_{i-1}wq_i$ (где w — центр окружности) одинаков для всех $1 \leq i \leq n$. Угол $\angle q_{i-1}wq_i = \alpha(Q) \in S^1$ называется центральным углом Q . Ясно, что $\alpha(Q)$ определен однозначно.

Обозначим $CRIT_n(L)$ множество критических n -звенных ломаных длины L . $CRIT_n = \bigcup_{L>1} CRIT_n(L)$ — множество всех критических n -звенных ломаных. На

Рис. 1, 2 и 3 представлены ломаные из $CRIT_n(2n)$ при $n = 4, 5, 6$, для которых центр описанной окружности лежит слева от каждого из звеньев. Начало и конец ломаной соединены для наглядности. Остальные ломаные в соответствующих множествах получаются из представленных отражением относительно горизонтальной прямой. Рисунки созданы с использованием [15]

Теорема 4. Пусть $n \geq 2$ и $L > 1$. Тогда

- (1) Если ε достаточно мал, то критические точки функции $\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)}$ — это в точности критические n -звенные ломаные длины L .
- (2) Критические точки функции $\mathcal{A}$ на $\widetilde{\mathcal{BL}}_n(L)$ — это в точности критические n -звенные ломаные длины L .

Доказательство. Рассмотрим ломаную $Q \in \mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$. Так же как в доказательстве леммы А, обозначим за l_i длину стороны $q_i q_{i+1}$ и за α_i угол между $(1, 0)$ и $(q_{i+1} - q_i)$. Тогда для $1 \leq i \leq n-1$ получаем следующие выражения частных производных $\mathcal{L}_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial x_i}(Q) &= m_\varepsilon(l_{i-1}) \cos \alpha_{i-1} - m_\varepsilon(l_i) \cos \alpha_i \\ \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial y_i}(Q) &= m_\varepsilon(l_{i-1}) \sin \alpha_{i-1} - m_\varepsilon(l_i) \sin \alpha_i,\end{aligned}$$

и $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_i}(Q) &= l_{i-1} \sin \alpha_{i-1} + l_i \sin \alpha_i \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y_i}(Q) &= -l_{i-1} \cos \alpha_{i-1} - l_i \cos \alpha_i\end{aligned}$$

Как хорошо известно, Q — критическая точка $\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)}$ если и только если $\text{grad } \mathcal{A}(Q) = \lambda \cdot \text{grad } \mathcal{L}_\varepsilon(Q)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть Q — критическая точка $\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)}$. Предположим, что для некоторого i длина стороны l_i меньше ε . Все длины не могут быть меньше ε , так как $(n-1)\varepsilon < 1 = |q_n - q_1|$, поэтому, (так как отражение многоугольника относительно прямой $x = 0$ переводит критические точки в критические точки) можно считать, что $l_{i-1} < \varepsilon$ и $l_i \geq \varepsilon$. Тогда линейная зависимость векторов $\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_i}(Q), \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y_i}(Q)\right)$ и $\left(\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial x_i}(Q), \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial y_i}(Q)\right)$ записывается в виде

$$\begin{aligned}0 &= \left(\frac{l_{i-1} \cos \alpha_{i-1}}{\varepsilon} - \cos \alpha_i\right) \cdot (l_{i-1} \cos \alpha_{i-1} + l_i \cos \alpha_i) \\ &\quad + \left(\frac{l_{i-1} \sin \alpha_{i-1}}{\varepsilon} - \sin \alpha_i\right) \cdot (l_{i-1} \sin \alpha_{i-1} + l_i \sin \alpha_i),\end{aligned}$$

что равносильно

$$l_{i-1}^2 + l_i l_{i-1} \cos(\alpha_i - \alpha_{i-1}) - \varepsilon l_i - \varepsilon l_{i-1} \cos(\alpha_i - \alpha_{i-1}) = 0.$$

Обозначим $A = l_{i-1}/\varepsilon$, $B = l_i/\varepsilon$, $C = \cos(\alpha_i - \alpha_{i-1})$. Тогда

$$0 \leq A < 1, \quad B \geq 1, \quad -1 \leq C \leq 1 \quad \text{и} \quad A^2 + ABC - B - AC = 0,$$

поэтому $1 \leq B = \frac{A^2 - AC}{1 - AC}$, то есть $1 - AC \leq A^2 - AC$, что противоречит тому, что $0 \leq A < 1$. Итого, если многоугольник Q — критическая точка $\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)}$, то все l_i не меньше ε . Из этого следует, что $\mathcal{L}(Q) = \mathcal{L}_\varepsilon(Q) = L$ и для каждой пары векторов $\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_i}(Q), \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y_i}(Q)\right)$ и $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(Q), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}(Q)\right)$ их линейная зависимость записывается в виде

$$(\cos \alpha_{i-1} - \cos \alpha_i) \cdot (l_{i-1} \cos \alpha_{i-1} + l_i \cos \alpha_i) + (\sin \alpha_{i-1} - \sin \alpha_i) \cdot (l_{i-1} \sin \alpha_{i-1} + l_i \sin \alpha_i) = 0,$$

что равносильно тому, что $l_i = l_{i-1}$ или $\alpha_i = \alpha_{i-1}$. Все углы не могут быть равны, так как $L > 1$. Пусть $\alpha_i = \alpha_{i-1}$ для некоторого $1 \leq i \leq n-1$, и $i \leq j \leq n-1$ — наименьший такой номер, что $\alpha_j \neq \alpha_{j-1}$ (существования такого j можно добиться, отразив картинку относительно прямой $x = 0$ при необходимости). Тогда $l_j = l_{j-1}$, но двигая q_j по эллипсу с фокусами в q_{j+1} и q_{j-2} , мы понимаем, что $l_{j-1} + l_{j-2} = l_j$, то есть $l_{j-2} = 0$, что противоречит тому, что все l_i не меньше ε . Итак, пока мы поняли,

что все l_i для $i = 1, \dots, n-1$ одинаковы. Из предыдущего и того, что коэффициент λ одинаков для всех $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$, следует, что величина

$$\lambda_i = \frac{\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_i}(Q) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(Q) + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y_i}(Q) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}(Q)}{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(Q)\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}(Q)\right)^2}$$

не зависит от i . Обозначим $\gamma_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$. Тогда

$$\lambda_i = \frac{\sin(\gamma_i)}{1 - \cos(\gamma_i)} = \operatorname{ctg}(\gamma_i/2).$$

Функция $\operatorname{ctg}(x/2): S^1 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ — биекция, поэтому мы получаем, что углы при всех вершинах q_i , $1 \leq i \leq n-1$ одинаковы, что и означает, что Q — критическая n -звенная ломаная длины L .

Пусть теперь Q — критическая n -звенная ломаная длины L . Тогда для любого i длина стороны $l_i = L/(n-1) > \varepsilon$, поэтому в некоторой окрестности Q функции $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_\varepsilon$ совпадают. Кроме того, $\gamma_i \neq 0$ для любого $1 \leq i \leq n$, так как три различные точки, лежащие на одной прямой, не лежат на одной окружности, а значит, $\left(\frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial x_i}(Q), \frac{\partial \mathcal{L}_\varepsilon}{\partial y_i}(Q)\right) \neq (0, 0)$ и найдется такое $\lambda_i \in \mathbb{R}$, что

$$\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_i}(Q), \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y_i}(Q)\right) = \lambda_i \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(Q), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}(Q)\right)$$

Из равенства центральных углов следует равенство углов при вершинах, поэтому λ_i не зависит от i , а значит, Q — критическая точка $\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)}$.

Второй пункт теоремы следует из первого, так как у любой ломаной $Q \in \widetilde{\mathcal{BL}}_n(L)$, при достаточно маленьких $\varepsilon > 0$, найдется окрестность в $\mathcal{BL}_n(L)$, являющаяся окрестностью Q в $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$. $\square$

5. ОПИСАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЛОМАНЫХ

Обозначим за $\overline{\mathcal{CRIT}}_n$ замыкание множества всех критических ломаных $\mathcal{CRIT}_n$ в конфигурационном пространстве многоугольников фиксированного периметра $\mathcal{C}_{n+1}$. Выясним, как выглядит $\overline{\mathcal{CRIT}}_n$ и каким образом в нем выделяется $\mathcal{CRIT}_n$. Сначала построим отображение $\mathcal{Q}: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{C}_{n+1}$, являющееся обратным к отображению α (которое определено в предыдущем параграфе и сопоставляет критической ломаной центральный угол):

- (1) Если $\mathcal{Q}/2\pi\mathbb{Z} \ni \alpha \neq 0$, то $\mathcal{Q}(\alpha) = [P]$, где P получается следующим образом: на единичной окружности в плоскости $\mathbb{R}^2$ отметим точку $(1, 0)$ — это точка p_0 , далее, для $i = 1, \dots, n$, точка p_i получается из точки p_{i-1} поворотом последней вокруг нуля на угол α против часовой стрелки.
- (2) Если $\alpha = 0$, то $\mathcal{Q}(\alpha) = [P]$, где $p_i = (i, 0)$ для $i = 0, \dots, n$.

Лемма В.

- (1) $\mathcal{Q}: S^1 \rightarrow \mathcal{C}_{n+1} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ — простая гладкая замкнутая кривая.
- (2) $\mathcal{Q}(S^1) = \overline{\mathcal{CRIT}}_n$;
- (3) $\mathcal{Q}(\{\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}: n\alpha \neq 0\}) = \mathcal{CRIT}_n$ и $\alpha|_{\mathcal{CRIT}_n}$ — обратное к $\mathcal{Q}|_{\{\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}: n\alpha \neq 0\}}$ отображение.

Доказательство. Третий пункт леммы есть просто переформулировка определения критической ломаной. Докажем первый пункт. В терминах $\mathbb{CP}^{n-1}$ определение $\mathcal{Q}$ записывается единообразно для всех $\alpha \in S^1$:

$$\mathcal{Q}(\alpha) = [1 : e^{i\alpha} : \dots : e^{(n-1)i\alpha}],$$

то есть σ целиком попадает в карту $\{[z_0 : \dots : z_{n-1}] \in \mathbb{CP}^{n-1} : z_0 \neq 0\} \cong \mathbb{R}^{2(n-1)}$, а в координатах $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{n-1}, y_{n-1})$ на $\mathbb{R}^{2(n-1)}$ кривая $\mathcal{Q}$ есть

$$\mathcal{Q}(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha, \cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \dots, \cos(n-1)\alpha, \sin(n-1)\alpha),$$

и первый пункт леммы доказан. Теперь, так как замыкание $\{\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} : n\alpha \neq 0\} \subseteq S^1$ есть S^1 , замыкание $\mathcal{CRIT}_n = \mathcal{Q}(\{\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} : n\alpha \neq 0\})$ есть $\mathcal{Q}(S^1)$ и второй пункт также доказан. $\square$

Таким образом, множество критических n -звенных ломаных $\mathcal{CRIT}_n \subseteq \mathcal{BL}_n$ распадается в объединение n непересекающихся гладких кривых $\mathcal{Q}\left(\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right)$, $k = 0, \dots, n-1$, и соседние кривые имеют общий конец в $\mathcal{BL}_n(+\infty) \cong \mathcal{C}_n$, а кривые с номерами 0 и $n-1$ имеют общий конец на $\mathcal{BL}_n(1)$. Кроме того, точки из $\overline{\mathcal{CRIT}_n} \cap \mathcal{BL}_n(+\infty)$ суть, как следует из работы [8], в точности критические точки ориентированной площади на $\mathcal{C}_n$ (нужно смотреть на $\mathcal{C}_n$ как на многоугольники периметра 1 и считать обычную ориентированную площадь многоугольника вместо нормированной).

Теперь опишем множество $\mathcal{CRIT}_n(L)$ критических n -звенных ломаных длины L . При построении описания мы будем активно пользоваться свойствами многочленов Чебышёва, поэтому для полноты изложения сначала напомним определения и основные факты про них, подробнее об этом можно прочитать, например, в первых двух главах книги [10]. Для натурального k многочлены $T_k(x)$ и $U_k(x)$ — многочлены Чебышёва первого и второго рода соответственно — определяются одной и той же рекуррентной формулой с разными первыми членами:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{k+2}(x) = 2xT_{k+1}(x) - T_k(x) \\ U_0(x) &= 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_{k+2}(x) = 2xU_{k+1}(x) - U_k(x) \end{aligned}$$

Они обладают следующим тригонометрическим свойством: если $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, то

$$T_k(\cos(\alpha)) = \cos(k\alpha) \text{ и } U_k(\cos(\alpha)) = \frac{\sin((k+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Кроме того, T_k и U_k — либо оба являются четными функциями, либо оба нечетными, и их четность совпадает с четностью k . Все нули многочленов Чебышёва простые и находятся на интервале $(-1, 1)$, более точно:

$$\begin{aligned} T_k^{-1}(0) &= \left\{ \cos \frac{(m-1/2)\pi}{k} \mid m = 1, 2, \dots, k \right\} \\ U_k^{-1}(0) &= \left\{ \cos \frac{m\pi}{k+1} \mid m = 1, 2, \dots, k \right\} \end{aligned}$$

Между любыми двумя нулями многочлена Чебышёва находится ровно один экстремум, минимумы и максимумы чередуются, значения в точках минимума отрицательны, а в точках максимума — положительны. Для многочленов Чебышёва первого рода

точки экстремума выражаются замкнутой формулой:

$$\left(\frac{dT_k}{dx}\right)^{-1}(0) = \left\{ \cos \frac{m\pi}{k} \mid m = 1, 2, \dots, k-1 \right\},$$

а экстремальные значения равны 1 и -1 в точках максимума и минимума соответственно. Для многочленов Чебышёва второго рода замкнутой формулы для точек экстремума нет, мы можем лишь раскрыть скобки и написать что-то в духе

$$\left(\frac{dU_k}{dx}\right)^{-1}(0) = \{ \cos \theta \mid \operatorname{tg}(k+1)\theta = (k+1) \operatorname{tg} \theta \neq 0 \},$$

а также сказать, что абсолютные величины экстремальных значений монотонно возрастают при удалении экстремальной точки от 0. Это последнее свойство сыграет важную роль в описании критических n -звенных ломаных длины L .

Пусть $n \geq 2$ — натуральное число. Обозначим $F_n(x) = |U_{n-1}(x)|$ и определим функцию

$$\begin{aligned} \sigma: \mathcal{CRIT}_n &\rightarrow (-1, 1) \\ Q &\mapsto \cos(\alpha'), \text{ где } 2\alpha' = \alpha(Q) \text{ и } \sin(\alpha') > 0. \end{aligned}$$

Прообразы уровней функции F_n относительно σ выделяют в критических n -звенных ломаных ломаные фиксированной длины, а именно, верна следующая

Лемма С.

(1) σ является инъекцией и

$$\sigma(\mathcal{CRIT}_n) = (-1, 1) \setminus F_n^{-1}(0) = (-1, 1) \setminus \left\{ \cos \frac{k\pi}{n} \mid k = 1, 2, \dots, n-1 \right\}$$

(2) Для любого $L > 1$

$$\sigma(\mathcal{CRIT}_n(L)) = F_n^{-1}(n/L)$$

Доказательство. Третий пункт леммы **В** говорит нам, что $\mathcal{Q}: \{\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} : n\alpha \neq 0\} \rightarrow \mathcal{CRIT}_n$ является биекцией и α — обратное к $\mathcal{Q}$ отображение. Но отображение

$$\sigma \circ \mathcal{Q}: \{\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} : \alpha \neq 0\} \rightarrow (-1, 1), \quad \alpha \mapsto \cos(\alpha'), \text{ где } 2\alpha' = \alpha \text{ и } \sin(\alpha') > 0$$

также является биекцией, откуда и следует первый пункт леммы.

Для доказательства второго пункта заметим, что если Q — критическая n -звенная ломаная, $\alpha = \alpha(Q)$ и R — радиус описанной вокруг Q окружности, то

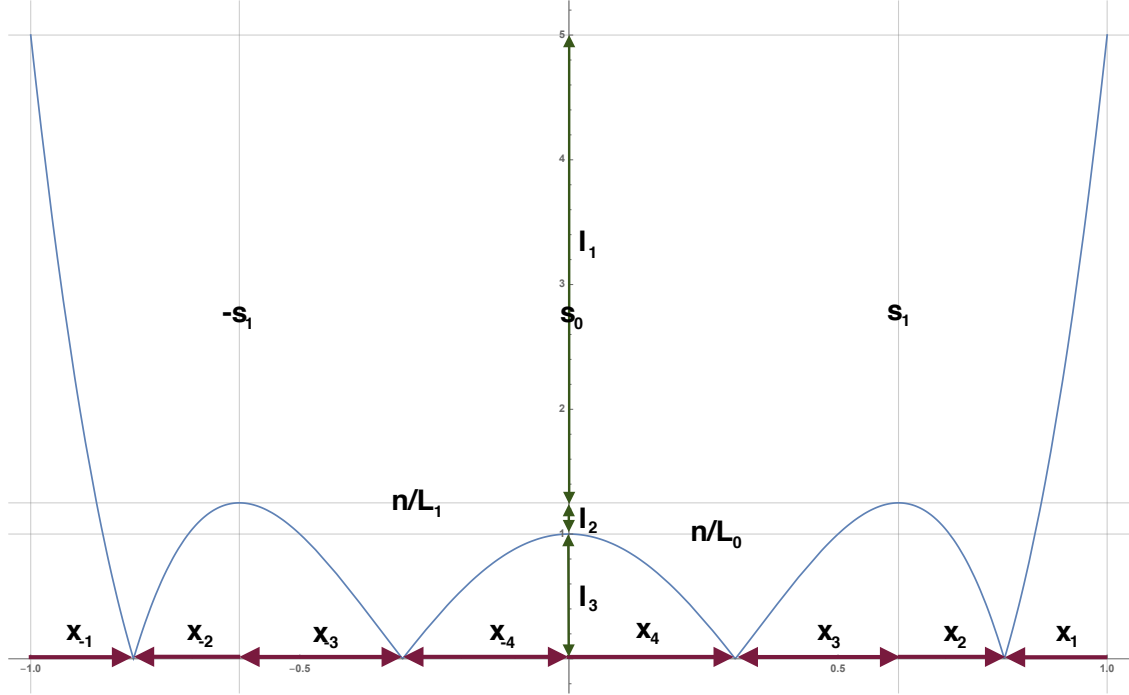
$$|q_1 - q_0| = \dots = |q_n - q_{n-1}| = R\sqrt{2 - 2\cos \alpha} = 2R|\sin \alpha'|$$

и

$$1 = |q_n - q_0| = R\sqrt{2 - 2\cos n\alpha} = 2R|\sin n\alpha'|.$$

Если длина ломаной Q равна L , то $n|\sin \alpha'| = L \cdot 1/(2R) = L|\sin n\alpha'|$, то есть $F_n(\sigma(Q)) = n/L$. $\square$

Таким образом, мы свели изучение (во всяком случае, подсчет числа элементов) $\mathcal{CRIT}_n(L)$ к изучению уровней функции F_n . Напомним, что симметрия относительно оси абсцисс $Q \mapsto \overline{Q}$ сохраняет длины и меняет знак площади, поэтому $\cdot$ является инволюцией на $\mathcal{CRIT}_n(L)$. Неподвижные точки этой инволюции — это ломаные, лежащие целиком на оси абсцисс, поэтому в $\mathcal{CRIT}_n$ нет


 Рис. 4. график $F_5(x)$ с обозначениями

неподвижных точек инволюции при четном n и ровно одна неподвижная точка $Q = ((-1/2, 0), (1/2, 0), \dots, (-1/2, 0), (1/2, 0)) \in \mathcal{CRIT}_n(n)$ при нечетном n . Если Q — критическая n -звенная ломаная, то $\sigma(\bar{Q}) = -\sigma(Q)$, что позволяет нам выбрать в каждой паре $(Q, \bar{Q})$ представителя — ту ломаную, для которой $\sigma \geq 0$. Фиксируем $L > 1$. Обозначим за $k(L)$ количество положительных решений уравнения $F_n(x) = n/L$ и пусть $x_1(L) > \dots > x_{k(L)}(L)$ — все эти решения. Тогда $x_{-1}(L) = -x_1(L), \dots, x_{-k(L)}(L) = -x_{k(L)}(L)$ — все оставшиеся решения (за исключением случая когда n нечетно и $L = n$, в котором появляется еще одно решение 0). Для $i = 1, \dots, k(L)$ рассмотрим соответствующие ломаные

$$Q_i(L) = \sigma^{-1}(x_i(L)) \in \mathcal{CRIT}_n(L) \text{ и } Q_{-i}(L) = \sigma^{-1}(x_{-i}(L)) = \overline{Q_i(L)} \in \mathcal{CRIT}_n(L),$$

которые (за исключением случая когда n нечетно и $L = n$, в котором к ним нужно добавить еще неподвижную точку инволюции) составляют всё множество $\mathcal{CRIT}_n(L)$.

Опишем как меняется $F_n^{-1}(n/L)$ при увеличении L . Функция $F_n|_{(-1,1) \setminus F_n^{-1}(0)}$ является гладкой, поэтому диффеоморфный тип $F_n^{-1}(n/L)$ меняется только когда n/L проходит через экстремальное значение F_n . Как следует из сказанного выше про многочлены Чебышёва, у F_n есть $n - 2$ экстремальных точки $\{\cos \theta \mid \tan n\theta = n \tan \theta \neq 0\}$.

0. При четном n это точки $\{s_1, \dots, s_{(n-2)/2}, -s_{(n-2)/2}, \dots, -s_1\}$, где $0 < s_1 < \dots < s_{(n-2)/2}$. Обозначим $L_i = n/F_n(s_i) = n/F_n(s_{-i})$. Тогда $n > L_1 > \dots > L_{(n-2)/2} > 1$.
1. При нечетном n это точки $\{s_0, s_1, \dots, s_{(n-3)/2}, -s_{(n-3)/2}, \dots, -s_1\}$, где $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{(n-3)/2}$. Обозначим $L_i = n/F_n(s_i) = n/F_n(s_{-i})$. Тогда $n = L_0 > L_1 > \dots > L_{(n-3)/2} > 1$.

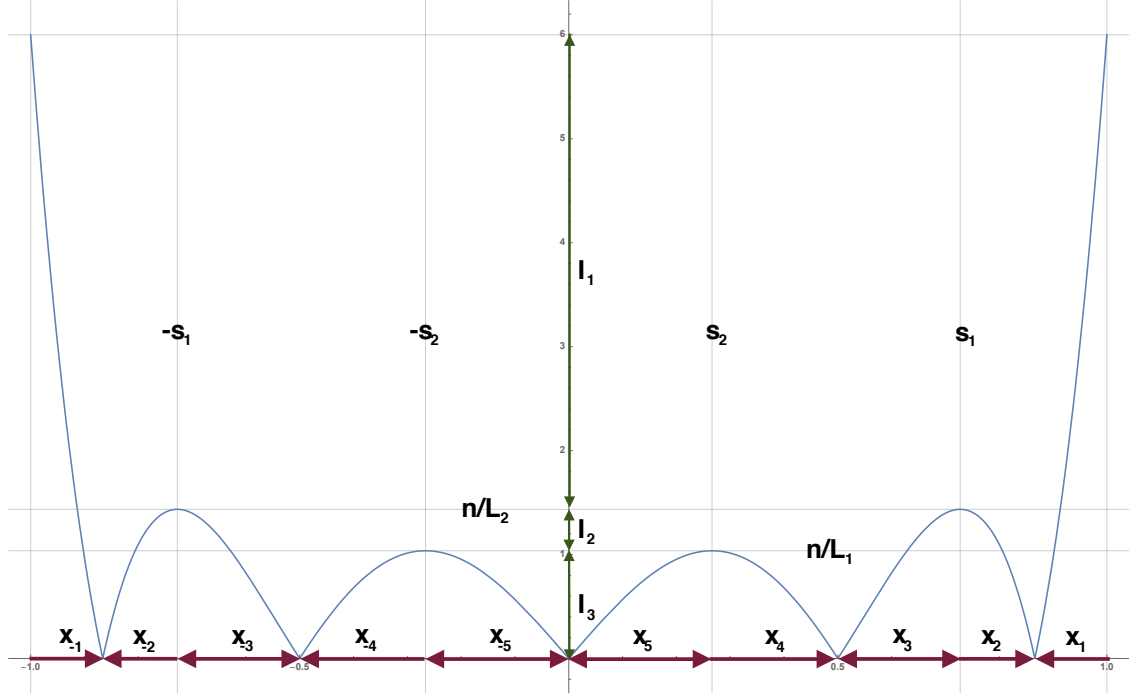


Рис. 5. график $F_6(x)$ с обозначениями

L_i разбивают луч $(1, +\infty)$ на открытые интервалы, которые мы назовем (слева направо) $I_1, \dots, I_{[(n+1)/2]}$. Графики $F_5(x)$ и $F_6(x)$ с введенными выше обозначениями приведены на Рис. 4 и Рис. 5 соответственно. Рисунки созданы с использованием [15].

Из всего вышесказанного, Леммы В и того, что все экстремальные точки $F_n|_{(-1,1) \setminus F_n^{-1}(0)}$ являются простыми максимумами, мы получаем следующее

Предложение 5. Пусть $L > 1$ и $k(L)$ — количество ломаных из $\mathcal{CRIT}_n(L)$ для центр описанной окружности лежит слева от каждого направленного звена. Тогда

- (1) Если $m < (n+1)/2$ и $L \in I_m$, то $k(L) = 2m - 1$.
- (2) Если n нечетно и $L \in I_{(n+1)/2}$, то $k(L) = n - 1$.
- (3) $\mathcal{CRIT}_n(L) = \{Q_1(L), \dots, Q_{k(L)}(L)\} \cup \{Q_{-1}(L), \dots, Q_{-k(L)}(L)\}$, где $Q_{-i}(L) = \overline{Q_i(L)}$.
- (4) $Q_i(L)$ является гладким отображением на луче $\{L \in (1, +\infty) : k(L) \geq i\}$.

6. НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК И ПОВЕДЕНИЕ ОРИЕНТИРОВАННОЙ ПЛОЩАДИ НА НИХ

Изучим сначала поведение ориентированной площади на критических точках. Напомним, что $\text{sign}(x) = x/|x|$ если $x \neq 0$ и $\text{sign}(0) = 0$.

Лемма D.

- (1) Если $Q \in \mathcal{CRIT}_n$, то $\text{sign}(\mathcal{A}(Q)) = \text{sign}(\sigma(Q))$.
- (2) Если $L > 1$ и $1 \leq i < j \leq k(L)$, то $\mathcal{A}(Q_i(L)) > \mathcal{A}(Q_j(L))$.

Доказательство. Заметим вначале, что для любого $k \geq 2$ и $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$\text{sign}(k \sin \alpha \pm \sin k\alpha) = \text{sign}(\sin \alpha \cdot (k \pm U_{k-1}(\cos \alpha))) = \text{sign}(\sin \alpha).$$

Пусть $\alpha = \alpha(Q)$ — центральный угол Q . Тогда ориентированная площадь многоугольника Q' , гомотетичного Q , но вписанного в единичную окружность равна

$$\frac{1}{2}(n \cdot \sin \alpha - \sin n\alpha),$$

а $|q'_n - q'_0| = \sqrt{2 - 2 \cos n\alpha}$, поэтому

$$\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(Q') = \frac{n \sin \alpha - \sin n\alpha}{2(1 - \cos(n\alpha))} = \frac{n \cdot \sin 2\alpha' - \sin 2n\alpha'}{4 \sin^2(n\alpha')},$$

где $2\alpha' = \alpha$ и $\sin \alpha' > 0$. Первый пункт леммы теперь следует из замечания в начале доказательства и того, что $\text{sign}(\sin \alpha(Q)) = \text{sign}(\sigma(Q))$.

Если $Q \in \mathcal{CRIT}_n(L)$, то $\sin^2(n\alpha') = (n/L)^2 \sin^2 \alpha$, откуда

$$\mathcal{A}(Q) = \frac{1}{2} \left((L/n)^2 \cdot n \operatorname{ctg} \alpha' - \operatorname{ctg} n\alpha' \right).$$

В условиях второго пункта пусть $\varphi = \alpha'(Q_i(L))$ и $\psi = \alpha'(Q_j(L))$. Тогда $0 < \varphi < \psi < \pi/2$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(Q_i(L)) - \mathcal{A}(Q_j(L)) &= \frac{L^2}{2n^2} \cdot (n(\operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{ctg} \psi) - (n/L)^2(\operatorname{ctg} n\varphi - \operatorname{ctg} n\psi)) \\ &= \frac{L^2}{2n^2} \cdot \left(\frac{n \sin(\psi - \varphi)}{\sin \varphi \cdot \sin \psi} \pm \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin n\psi}{\sin \psi} \cdot \frac{\sin n(\psi - \varphi)}{\sin n\varphi \cdot \sin n\psi} \right) \\ &= \frac{L^2(n \sin(\psi - \varphi) \pm \sin n(\psi - \varphi))}{2n^2 \sin \varphi \cdot \sin \psi}. \end{aligned}$$

Теперь из замечания в начале доказательства получаем, что

$$\text{sign}(\mathcal{A}(Q_i(L)) - \mathcal{A}(Q_j(L))) = \text{sign}(\sin(\psi - \varphi)) = 1$$

и второй пункт леммы также доказан. $\square$

Напомним, что критическая точка p функции f , определенной на многообразии M , называется вырожденной, если определитель гессиана $\det \operatorname{Hess}_p(f)$ (вычисленного в каких-то/любых координатах в окрестности p) равен 0. В противном случае критическая точка называется невырожденной и определен ее индекс Морса, равный количеству отрицательных собственных чисел гессиана.

Докажем следующую лемму, сводящую вычисление индексов к конечному количеству случаев.

Лемма Е. *Множество*

$$\{Q \in \mathcal{CRIT}_n : Q \text{ — вырожденная критическая точка } \mathcal{A}|_{\mathcal{BL}(\mathcal{L}(Q))}\}$$

конечно.

Доказательство. Как хорошо известно (например, [6]), невырожденность гессиана функции на гиперповерхности уровня гладкой функции равносильна невырожденности обрамленного гессиана. Пусть $Q \in \mathcal{CRIT}_n$ тогда обрамленный гессиан функции $\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}(\mathcal{L}(Q))}$ есть

$$BH_Q(\mathcal{L}, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & (\operatorname{grad}_Q \mathcal{L})^T \\ \operatorname{grad}_Q \mathcal{L} & \operatorname{Hess}_Q(\mathcal{A} - \lambda(Q) \cdot \mathcal{L}) \end{pmatrix},$$

где $\lambda(Q)$ таково, что $\text{grad}_{\gamma(t)} \mathcal{A} = \lambda(Q) \text{grad}_{\gamma(t)} \mathcal{L}$. В обозначениях доказательства Теоремы 4 $\lambda(Q) = \text{ctg}(\gamma_i/2)$, а элементы $\text{grad}_Q \mathcal{L}$ есть линейные комбинации $\cos \alpha_i$ и $\sin \alpha_i$. Прямые вычисления показывают, что элементы матрицы $\text{Hess}_Q(\mathcal{L})$ имеют вид

$$\frac{n}{L} \cdot (\text{квадратичная форма от } \sin \alpha_i \text{ и } \cos \alpha_i).$$

$\text{Hess}_Q(\mathcal{A})$ есть постоянная матрица. Таким образом, $\det BH_Q(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ есть рациональная функция от $\text{ctg}(\alpha(Q)/2)$. Чтобы доказать первый пункт леммы, осталось показать, что $\det BH_Q(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ не является тождественным нулем. В самом деле, пусть $L = n$ и $Q = Q_i(n)$, где i — наибольший возможный нечетный номер. Посмотрим на подмногообразии $\mathcal{M}(Q)$ ломаных с теми же длинам ребер, что и Q . Как следует из [4, Th 2, Cor 2], Q является невырожденным локальным минимумом $\mathcal{A}|_{\mathcal{M}(Q)}$, то есть, так как размерность $\mathcal{M}(Q)$ равна $n - 2$, у $\text{Hess}_Q(\mathcal{A}|_{\mathcal{B}\mathcal{L}_n(n)})$ есть хотя бы $n - 2$ положительных собственных числа. Теперь посмотрим на подмногообразии в $\mathcal{B}\mathcal{L}_n(n)$, состоящее из ломаных, вокруг которых можно описать окружность. Как следует из [8, Lemma 2], на этом подмногообразии Q является невырожденным локальным максимумом. Значит, так как размерность этого подмногообразия равна $n - 1$, у $\text{Hess}_Q(\mathcal{A}|_{\mathcal{B}\mathcal{L}_n(n)})$ есть хотя бы $n - 1$ отрицательное собственное число. Итого, так как $\dim \mathcal{B}\mathcal{L}_n(n) = 2n - 3 = (n - 2) + (n - 1)$, мы получили, что у $\text{Hess}_Q(\mathcal{A}|_{\mathcal{B}\mathcal{L}_n(n)})$ нет нулевых собственных чисел, а значит, $\det BH_Q(\mathcal{L}, \mathcal{A}) \neq 0$. $\square$

7. ИНДЕКСЫ МОРСА КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ОРИЕНТИРОВАННОЙ ПЛОЩАДИ

Теперь приступим к собственно вычислению индексов критических точек. Прямое вычисление собственных чисел гессиана не представляется возможным, поэтому мы будем использовать косвенные методы. Эти методы, к сожалению, не позволяют доказать, что критическая точка невырождена, поэтому нам придется предположить некоторые условия невырожденности, при которых мы сможем вычислить индексы. Следуя [4], дадим следующее определение:

Определение. Ломаная $Q \in \mathcal{CRIT}_n$ называется ломаной бифуркации, если

$$n \text{tg} \left(\frac{\alpha(Q)}{2} \right) = \text{tg} \left(\frac{n\alpha(Q)}{2} \right).$$

Заметим, что $Q \in \mathcal{CRIT}_n$ является ломаной бифуркации, если и только если $\sigma(Q)$ является экстремальным значением F_n . Для ломаной $Q \in \mathcal{CRIT}_n(L)$, являющейся невырожденной критической точкой $\mathcal{A}|_{\mathcal{B}\mathcal{L}_n(L)}$, обозначим за $\mu(Q)$ её индекс Морса относительно $\mathcal{A}|_{\mathcal{B}\mathcal{L}_n(L)}$. Для краткости будем называть такие ломаные невырожденными. Заметим, что так как $\overline{Q_i(L)} = Q_{-i}(L)$, ломаные $Q_i(L)$ и $Q_{-i}(L)$ либо обе являются вырожденными, либо обе невырожденными, и в случае невырожденности мы имеем

$$\mu(Q_i(L)) + \mu(Q_{-i}(L)) = 2n - 3.$$

Это наблюдение позволяет нам доказывать оценки на индексы только для $Q_i(L)$, где $i > 0$.

Докажем, что $\mu(Q)$ постоянен на компонентах связности $\mathcal{CRIT}_n \setminus \{\text{ломаные бифуркации}\}$. А именно, верна следующая

Лемма F. Пусть $L_2 > L_1 > 1$, $1 \leq |i| \leq k(L_1)$, $Q_i(L_1)$ является невырожденной критической точкой $\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}_n(L_1)}$, а $Q_i(L_2)$ является невырожденной критической точкой $\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}_n(L_2)}$. Тогда

$$\mu(Q_i(L_1)) = \mu(Q_i(L_2)).$$

Доказательство. Выберем достаточно маленький $\varepsilon > 0$ и для $L \in [L_1; L_2]$ рассмотрим C^1 -дiffeоморфизмы $\pi_L: \mathcal{BL}_n^\varepsilon(L) \rightarrow S^{2n-3}$, определенные в Теореме 3. Перенесем функцию $\mathcal{A}$ с $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$ на S^{2n-3} посредством этого diffeоморфизма:

$$\mathcal{A}_L: S^{2n-3} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{A}_L = \mathcal{A} \circ \pi_L^{-1}.$$

Из второй части Теоремы 3 и Предложения 5 следует, что $\mathcal{A}_L$ в окрестности $Q_i(L)$ есть гладкое семейство гладких отображений. Значит, $\mu(Q_i(L)) = \mu_{\mathcal{A}_L}(\pi_L(Q_i(L)))$ может измениться только если $\pi(Q_i(L)) = \pi(Q_j(L))$ для некоторого $j \neq i$, но такое возможно только если $Q_i(L)$ — ломаная бифуркации, а $Q_i([L_1; L_2])$ целиком лежит в компоненте связности $\mathcal{CRIT}_n \setminus \{\text{ломанные бифуркации}\}$. $\square$

Сначала получим верхние оценки на $\mu(Q_i(L))$, используя результаты про индексы Морса шарнирных многоугольников из работ [12], [14], [16] и [4]. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}(l_0, \dots, l_{n-1})$ — конфигурационное пространство многоугольников с фиксированными длинами сторон и $P = (p_0, \dots, p_{n-1}) \in \mathcal{M}$ — вписанный в окружность с центром O многоугольник. Заведем следующие обозначения:

- $e = e(P)$ — количество сторон P относительно которых точка O лежит слева;
- $\omega = \omega(P)$ — число кручения P относительно O ;
- $\alpha_i = \alpha_i(P) \in \mathbb{R}/2\pi$ для $i = 0, \dots, n-1$ — такой угол, что $2\alpha_i = \angle p_i O p_{i+1}$ и $\sin \alpha_i > 0$.

Верна следующая

Теорема 6 (Гордон, Жукова, Панина, Теплицкая, Химшиашвили). Пусть $P = (p_0, \dots, p_{n-1}) \in \mathcal{M}(l_0, \dots, l_{n-1})$ — вписанный в окружность с центром O многоугольник, такой что

- (1) O не лежит ни на одной из сторон;
- (2) P не лежит целиком на одной прямой;
- (3) $\operatorname{tg} \alpha_0 + \dots + \operatorname{tg} \alpha_{n-1} \neq 0$.

Тогда P является невырожденной критической точкой ориентированной площади и его индекс Морса равен

$$e - 1 - 2\omega - \begin{cases} 0, & \text{если } \operatorname{tg} \alpha_0 + \dots + \operatorname{tg} \alpha_{n-1} > 0; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Применим эту теорему к нашей ситуации.

Лемма G. Пусть $L > 1$. Тогда

- (1) Если $Q_1(L)$ — невырожденная ломаная, то $\mu(Q_1(L)) = 2n - 3$.
- (2) Если $2 \leq i \leq k(L)$, $Q_i(L)$ — невырожденная ломаная, не являющаяся ломаной бифуркации, и центр описанной вокруг нее окружности отличен от начала координат, то

$$\mu(Q_i(L)) \leq 2n - i - 2$$

Доказательство. Для доказательства первого пункта леммы рассмотрим $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$ с достаточно маленьким ε . Тогда из Теоремы 4 и компактности $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$ мы получаем, что глобальный максимум $\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)}$ достигается на некоторой ломаной из $\mathcal{CRIT}_n(L)$.

Теперь из Леммы D мы видим, что ориентируемая площадь принимает наибольшее значение на $\mathcal{CRIT}_n(L)$ в точке $Q_1(L)$, поэтому $Q_1(L)$ есть глобальный максимум $\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)}$ и первый пункт леммы доказан.

Для доказательства второго пункта леммы мы рассмотрим пространство $\mathcal{M}(Q_i(L)) \cong \mathcal{M}(L/n, \dots, L/n, 1)$ ломаных с теми же длинами звеньев и вычислим индекс Морса Q_i относительно ориентированной площади, суженной на это подпространство. По Лемме B $Q_i(L)$ находится в некоторой компоненте связности кривой $\mathcal{Q}$. Обозначим B ломаную бифуркации на этой компоненте и пусть $C \in \mathcal{BL}_n(+\infty)$ — тот конец компоненты связности кривой $\mathcal{Q}$, который лежит по ту же сторону от B , что и $Q_i(L)$. Несложно видеть, что C есть правильная n -звезда с числом кручения $[(i+1)/2]$. Обозначим $\mathcal{Q}_i$ часть кривой $\mathcal{Q}$ от C до B . Для любого $Q \in \mathcal{Q}_i$ центр описанной вокруг Q окружности лежит по левую сторону от любого звена. Если Q находится на $\mathcal{Q}_i$ достаточно близко к C , то центр описанной окружности лежит по левую сторону от $q_n q_0$ при нечетном i и по правую сторону от $q_n q_0$ при четном i . Итого, по Теореме 6, для $Q \in \mathcal{Q}_i$ вблизи C , так как $n\alpha(C) = 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A}|_{\mathcal{M}(Q)}}(Q) &= (n+1) - 1 - (i+1) - 0 = n - i - 1 && \text{при нечетном } i; \\ \mu_{\mathcal{A}|_{\mathcal{M}(Q)}}(Q) &= n - 1 - i - 0 = n - i - 1 && \text{при четном } i. \end{aligned}$$

Теперь осталось разобраться с тем, что происходит с индексом при движении по $\mathcal{Q}_i$ от C к B . На этом пути нет ломаных бифуркации и ломаных, лежащих целиком на одной прямой, поэтому $\mu_{\mathcal{A}|_{\mathcal{M}(Q)}}(Q)$ может измениться только из-за того, что $q_n q_0$ проходит через центр окружности. Это происходит при $n\alpha(Q) = \pi \bmod 2\pi$, то есть при $T_n(\sigma(Q)) = 0$, а нули многочленов Чебышева первого рода лежат на отрезках, соответствующих x_i при нечетном i . Получаем, что при нечетном i после прохождения стороны $q_n q_0$ через центр описанной окружности, этот центр начинает лежать справа от стороны $q_n q_0$, число кручения уменьшается на один, $n \operatorname{tg} \frac{\alpha(Q)}{2} - \operatorname{tg} \frac{n\alpha(Q)}{2}$ меняет свой знак и поэтому по-прежнему

$$\mu_{\mathcal{A}|_{\mathcal{M}(Q)}}(Q) = n - 1 - (i - 1) - 1 = n - i - 1.$$

$\mathcal{M}(Q)$ является гладким многообразием размерности $(n+1) - 3 = n - 2$ в окрестности Q , поэтому у квадратичной формы $Hess_Q(\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}_n(\mathcal{L}(Q))})$ есть подпространство, на котором она положительно определена, размерности

$$\dim \mathcal{M}(Q) - \mu_{\mathcal{A}|_{\mathcal{M}(Q)}}(Q) = (n - 2) - (n - i - 1) = i - 1,$$

а значит, индекс Морса Q относительно $\mathcal{A}|_{\mathcal{BL}_n(\mathcal{L}(Q))}$ не превосходит

$$\dim \mathcal{BL}_n(\mathcal{L}(Q)) - (i - 1) = (2n - 3) - (i - 1) = 2n - i - 2.$$

□

Теперь мы готовы вычислить индексы Морса невырожденных критических точек ориентированной площади.

Теорема 7. Пусть $L > 1$ и $1 \leq |i| \leq k(L)$. Тогда, за исключением конечного количества значений L , $Q_i(L)$ является невырожденной критической точкой функции $\mathcal{A}$ на $\mathcal{BL}_n(L)$ и ее индекс Морса равен

$$\mu(Q_i(L)) = \mu_i = \begin{cases} 2n - i - 2, & \text{если } i > 0; \\ -i - 1, & \text{если } i < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Невырожденность $Q_i(L)$ для всех L кроме конечно числа есть содержание Леммы Е. Из Леммы F следует, что $\mu(Q_i(L))$ зависит только от i . Из того, что $\mu_i + \mu_{-i} = 2n - 3$ следует, что достаточно вычислить μ_i только для $i > 0$.

Пусть $n = L$. Тогда все возможные Q_i определены. Мы воспользуемся вычислением индексов Q_{2i-1} как критических точек ориентированной площади, рассматриваемой как функция на $\mathcal{C}_{n+1}$, из работы [8]. Ориентированная площадь, рассматриваемая в этой работе, нормируется не длиной последней стороны, а периметром:

$$\tilde{\mathcal{A}}(Q) = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0 + \dots + x_n y_1 - x_1 y_n}{(|q_1 - q_0| + \dots + |q_0 - q_n|)^2},$$

но при сужении на $\mathcal{BL}_n(L)$ мы получаем, что $\mathcal{A}(Q)$ и $\tilde{\mathcal{A}}(Q)$ отличаются на постоянный положительный множитель, поэтому индексы относительно этих функций совпадают. Пусть $n - 1 \geq 2i - 1 > 0$. $Q_{2i-1}(n)$ есть правильная звезда с числом кручения равным i , поэтому относительно $\tilde{\mathcal{A}}$ ее индекс равен $2(n + 1) - 2i - 2$. $\mathcal{BL}_n(n)$ является (во всяком случае в окрестности $Q_{2i-1}(n)$) гладкой гиперповерхностью коразмерности один, поэтому

$$2n - 2i - 1 = 2(n + 1) - 2i - 2 - 1 \leq \mu_{2i-1} \leq 2(n + 1) - 2i - 2 = 2n - 2i.$$

Но по Лемме G, $\mu_{2i-1} \leq 2n - (2i - 1) - 2 = 2n - 2i - 1$, откуда получаем, что $\mu_{2i-1} = 2n - 2i - 1$.

Пусть теперь L достаточно велико. Получим оценку на индекс $Q_{2i}(L)$ с вершинами $p_0, \dots, p_n$. Для этого рассмотрим подмногообразие в $\mathcal{BL}_n(L)$, получающееся замораживанием двух ребер:

$$\{Q \in \mathcal{BL}_n(L) : q_0 = p_0, q_n = p_n, q_{n-1} = p_{n-1}\}.$$

Это подмногообразие естественным образом отождествляется с $\mathcal{BL}_{n-1}(L')$, где $L' = \frac{(n-1)L}{n|p_{n-1}-p_0|}$, а ориентированная площадь $\mathcal{A}$, суженная на это подмногообразие, в константное число раз отличается от стандартной ориентированной площади на $\mathcal{BL}_{n-1}(L')$. При этом отождествлении ломаная $Q_{2i}(L) \in \mathcal{BL}_n(L)$ переходит в $Q_{2i-1}(L') \in \mathcal{BL}_{n-1}(L')$, для которой мы уже посчитали индекс Морса. Индекс точки относительно сужения функции на подмногообразие не больше чем индекс на всем многообразии, откуда получаем, что

$$\mu_{2i} \geq 2(n - 1) - (2i - 1) - 2 = 2n - 2i - 3.$$

Теперь воспользуемся доказанными в Теореме 3 результатами гладкости. Ориентированная площадь $\mathcal{A}$ почти всегда является функцией Морса на гладком многообразии $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$ при достаточно маленьком ε . Следуя [11], Выберем на $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$ риманову метрику общего положения и рассмотрим соответствующий морсов комплекс $\{C_i, d\}_{i=0}^{2n-3}$: в его i -й степени находится свободная абелева группа ранга, равного количеству критических точек индекса i , а о дифференциале нам понадобится только следующий факт: если $d: C_i \rightarrow C_{i-1}$ не нулевой, то найдутся критические точки индексов i и $i - 1$, такие что в первой из них $\mathcal{A}$ больше, чем во второй. Так как $\mathcal{BL}_n^\varepsilon(L)$ диффеоморфно S^{2n-3} , гомологии этого комплекса нулевые во всех степенях кроме 0 и $2n - 3$, в которых они равны $\mathbb{Z}$. Из Леммы G мы знаем, что $C_{2n-3} = \mathbb{Z}Q_1(L)$, поэтому $\mathbb{Z} \cong \text{Ker}(d: \mathbb{Z}Q_1(L) \rightarrow C_{2n-4})$, а так как C_{2n-4} не имеет кручения, мы получаем, что $0 = d: C_{2n-3} \rightarrow C_{2n-4}$. Итого, у комплекса $C = \{0 \rightarrow C_{2n-4} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow 0\}$ нулевые гомологии.

Из доказанного выше и Леммы G мы получаем, что μ_{2i} равно $2n - 2i - 3$ или $2n - 2i - 2$. Докажем индукцией по i , что $\mu_{2i} = 2n - 2i - 2$ и что при $2i < n - 1$

дифференциал $d: C_{2n-2i-2} \rightarrow C_{2n-2i-3}$ — изоморфизм. В самом деле, если $2i < n - 1$ и $\mu_{2i=2n-2i-3}$, то $C_{2n-2i-3} = \mathbb{Z}Q_{2i}(L) \oplus \mathbb{Z}Q_{2i+1}(L)$, а $C_{2n-2i-2} = 0$. Но тогда гомологии в члене $2n - 2i - 3$ не могут быть нулевыми, так как ранг $C_{2n-2i-4}$ меньше 2. Если же $\mu_{2i} = 2n - 2i - 2$, то из предположения индукции мы получаем, что $0 \rightarrow \mathbb{Z}Q_{2i}(L) \rightarrow \mathbb{Z}Q_{2i+1}(L) \rightarrow$ точная последовательность, то есть $d: C_{2n-2i-2} \rightarrow C_{2n-2i-3}$ — инъекция. При этом образ не может быть собственной подгруппой $C_{2n-2i-3}$, так как он совпадает с ядром $d: C_{2n-2i-3} \rightarrow C_{2n-2i-4}$, а $C_{2n-2i-4}$ — свободная абелева группа и, в частности, не имеет кручения. Итого, $d: C_{2n-2i-2} \rightarrow C_{2n-2i-3}$ — изоморфизм.

Осталось разобрать случай $2i = n - 1$: μ_{n-1} равно $n - 1$ или $n - 2$. Пусть $\mu_{n-1} = n - 2$. Тогда $\mu_{1-n} = n - 1$ и из доказанного выше следует, что последовательность $0 \rightarrow \mathbb{Z}Q_{1-n}(L) \xrightarrow{d} \mathbb{Z}Q_{n-1}(L) \rightarrow 0$ точна. Но $\mathcal{A}(Q_{1-n}(L)) < 0 < \mathcal{A}(Q_{n-1}(L))$, поэтому d обязан быть нулевым. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. A. Agrachev, D. Pallaschke, S. Scholtes, “On Morse theory for piecewise smooth functions”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **3** (1997), 449–469.
- [2] M. Farber, *Invitation to Topological Robotics*, Zuerich Lectures in Advanced Mathematics, EMS, Zuerich, 2008.
- [3] M. Farber, D. Schuetz, “Homology of planar polygon spaces”, *Geometria Dedicata*, **125** (2007), 75–92.
- [4] J. Gordon, G. Panina, Y. Teplitskaya, “Polygons with prescribed edge slopes: configuration space and extremal points of perimeter”, *Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry*, **60** (2019), 1–15.
- [5] M. Goresky and R. MacPherson, *Stratified Morse theory*, Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [6] C. Hassel, E. Rees, “The Index of a Constrained Critical Point”, *The American Mathematical Monthly*, **100**:8 (1993), 772–778.
- [7] M. Kapovich and J. Millson, “On the moduli space of polygons in the Euclidean plane”, *J. Diff. Geom.*, **42** (1995), 430–464.
- [8] G. Khimshiashvili, G. Panina, D. Siersma, “Extremal areas of polygons with fixed perimeter”, 2018, arXiv: 1805.07521.
- [9] J. C. Leger, “Aire, périmètre et polygones cocycliques”, 2018, arXiv: 1805.05423.
- [10] J. C. Mason and D. C. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman and Hall/CRC, 2002.
- [11] J. Milnor, et al., *Lectures on the H-Cobordism Theorem*, Princeton University Press, 1965.
- [12] G. Panina, G. N. Khimshiashvili, “Cyclic polygons are critical points of area”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XVI*, Зап. научн. сем. ПО-МИ, **360**, 2008, 238–245.
- [13] G. Panina, D. Siersma, “On the Area of Constrained Polygonal Linkages”, *Topology Appl.*, **238** (2018), 32–44.
- [14] G. Panina, A. Zhukova, “Morse index of a cyclic polygon”, *Cent. Eur. J. Math.*, **9**:2 (2011), 364–377.
- [15] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 10.0, Champaign, IL, 2014.
- [16] А. Жукова, “Индекс Морса циклического многоугольника. II”, *Алгебра и анализ*, **24**:3 (2012), 128–147.